

Recenzavo: prof. habil. dr. L. Sakalauskas, Matematikos ir informatikos institutas
doc. dr. R. A. Lukoševičius, Šiaulių universitetas

Ši knyga skirta universitetų informatikos specialybės studentams ir visiems, norintiems studijuoti matematinį programavimą.

Leidinyje aptarti svarbiausi tiesinio programavimo uždavinių tipai. Pateikta nemaža uždavinių sprendimo pavyzdžių bei užduočių.

Dėkoju Matematikos ir informatikos instituto profesoriui habil. dr. Leonidui Sakalauskui ir Šiaulių universiteto informatikos katedros doc. dr. Rimvydui Lukoševičiui už labai vertingas pastabas ir pasiūlymus.

Spausdinti rekomendavo Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos katedra (2007-03-23, protokolo Nr. 7), Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto taryba (2007-05-31, protokolo Nr. 9).

ISBN 978-9986-38-838-8 (1 dalis)
ISBN 978-9986-38-839-5 (bendras)

© Kęstutis Žilinskas, 2007
© Šiaulių universitetas, 2007
© VšĮ Šiaulių universiteto leidykla, 2007

TURINYS

1. ĮVADAS	7
1.1. MATEMATINIO PROGRAMAVIMO RAIDOS ISTORIJA	7
1.2. GAMYBOS VALDYMAS	10
1.3. VERSLININKAS – OPTIMISTAS	11
1.4. FINANSINIS KONTROLIERIUS – PESIMISTAS	12
2. MATEMATINIS PROGRAMAVIMAS	14
2.1. MATEMATINIO PROGRAMAVIMO SAMPRATA	14
2.2. OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIO SAMPRATA	17
2.3. PAGRINDINIAI OPTIMIZAVIMO UŽDAVINIŲ TIPAI	19
3. TIESINIS PROGRAMAVIMAS	23
3.1. TIESINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIAI	23
3.1.1. <i>Bendrosios sąvokos</i>	23
3.1.2. <i>Apibrėžimai</i>	24
3.1.3. <i>Tiesinio programavimo uždavinio formuluotė</i>	26
3.1.4. <i>Tiesinio programavimo uždavinio formos</i>	28
3.1.5. <i>Uždavinių formos pertvarkymas</i>	29
3.1.5.1. <i>Ribojimo-nelygybės keitimas ribojimu-lygybe</i> ...	29
3.1.5.2. <i>Ribojimo-nelygybės keitimas ribojimu-lygybe</i> ...	30
3.1.5.3. <i>Laisvojo kintamojo pakeitimas</i>	30
3.1.5.4. <i>Minimizavimo uždavinio pakeitimas maksimizavimo uždaviniu</i>	30
3.1.6. <i>Uždavinių matematiniai modeliai</i>	31
3.1.6.1. <i>Žaliavų panaudojimo uždaviniai</i>	31
3.1.6.2. <i>Dietos uždaviniai</i>	35
3.1.7. <i>Užduotys</i>	36
3.2. TIESINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIO SPRENDIMAS GRAFINIŲ METODU.....	39
3.2.1. <i>Programavimo uždavinio geometrinė interpretacija</i>	39
3.2.2. <i>Grafinis programavimo uždavinio sprendimo metodas</i>	40
3.2.3. <i>Užduotys</i>	47
3.3. TIESINIŲ LYGČIŲ SISTEMOS SPRENDIMAS GAUSO-ŽORDANO METODU	49
3.3.1. <i>Gauso-Žordano metodo sąvoka</i>	49
3.3.2. <i>Gauso-Žordano metodo algoritmas</i>	50
3.3.3. <i>Baziniai ir laisvieji kintamieji. Baziniai sprendiniai</i> ...	55
3.3.4. <i>Atraminiai sprendiniai</i>	56
3.3.5. <i>Užduotys</i>	60

3.4.	TIESINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIO SAVYBĖS	62
3.4.1.	<i>Leistimų sprendinių ir sprendinių aibių savybės</i>	62
3.4.2.	<i>Sprendinio egzistavimo pakankamosios sąlygos</i>	63
3.4.3.	<i>Pakankamoji sprendinio egzistavimo sąlyga</i>	64
3.5.	SIMPLEKSO METODAS	65
3.5.1.	<i>Simplekso metodo idėja</i>	65
3.5.2.	<i>Simplekso metodo algoritmas</i>	66
3.5.3.	<i>Simplekso metodo taikymo pavyzdys</i>	70
3.5.4.	<i>Užduotys</i>	72
3.6.	DIRBTINĖS BAZĖS METODAI.....	74
3.6.1.	<i>Dviejų etapų metodas</i>	74
3.6.1.1.	<i>Pirmasis etapas</i>	75
3.6.1.1.	<i>Pirmasis etapas</i>	75
3.6.2.	<i>M metodas</i>	90
3.6.3.	<i>Užduotys</i>	99
3.7.	MODIFIKUOTAS SIMPLEKSO METODAS.....	101
3.7.1.	<i>Modifikuoto simplekso metodo algoritmas</i>	101
3.7.2.	<i>Modifikuoto simplekso metodo taikymas</i>	105
3.7.3.	<i>Užduotys</i>	115
3.8.	KODĖL SIMPLEKSO METODAS LEIDŽIA RASTI SPRENDINIŲ?	117
3.9.	SUNKESNI SIMPLEKSO METODO TAIKYMO ATVEJAI.....	118
3.9.1.	<i>Neaprežti sprendiniai</i>	118
3.9.2.	<i>Alternatyvūs sprendiniai</i>	119
3.9.3.	<i>Neegzistuojantys sprendiniai</i>	121
3.9.4.	<i>Išsigimusieji sprendiniai</i>	122
3.10.	TESTINIŲ UŽDAVINIŲ PROBLEMAS	124
4.	DUALUMAS TIESINIAME PROGRAMAVIME	127
4.1.	DUALIEJI TIESINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIAI	127
4.1.1.	<i>Dualiojo uždavinio formulavimas</i>	127
4.1.2.	<i>Dualiojo uždavinio sudarymo taisyklės</i>	128
4.1.3.	<i>Kanoninio uždavinio dualusis uždavinys</i>	130
4.1.4.	<i>Standartinio uždavinio dualusis uždavinys</i>	130
4.2.	DUALIŲJŲ UŽDAVINIŲ SAVYBĖS	131
4.3.	DUALIOJO UŽDAVINIO SPRENDINIO RADIMAS	132
4.3.1.	<i>Užduotys</i>	134
4.4.	DUALUSIS SIMPLEKSO METODAS	137
4.4.1.	<i>Dualiojo simplekso metodo algoritmas</i>	137
4.4.2.	<i>Uždavinių sprendimas dualiuoju simplekso metodu</i>	139
4.4.3.	<i>Užduotys</i>	144

5.	SPECIALIEJI TIESINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIAI	147
5.1.	TRANSPORTO UŽDAVINIAI	147
5.1.1.	<i>Transporto uždavinio formulavimas</i>	147
5.1.2.	<i>Transporto uždavinio matematinis modelis</i>	148
5.1.3.	<i>Bendroji transporto uždavinio užrašymo forma</i>	148
5.1.4.	<i>Transporto uždavinio savybės</i>	149
5.1.5.	<i>Transporto uždavinio pradinio plano radimo metodai</i>	153
5.1.5.1.	<i>Šiaurės vakarų kampo metodas</i>	153
5.1.5.2.	<i>Mažiausio elemento metodas</i>	157
5.1.6.	<i>Transporto uždavinių sprendimas</i>	160
5.1.6.1.	<i>Potencialų metodas</i>	160
5.1.6.2.	<i>Skirstymo metodas</i>	165
5.1.7.	<i>Nesubalansuotas transporto uždavinys</i>	168
5.1.8.	<i>Užduotys</i>	171
5.2.	SVEIKASKAIČIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINYS.....	172
5.2.1.	<i>Geometrinė sveikaskaičio uždavinio interpretacija</i>	172
5.2.2.	<i>Sveikaskaičio programavimo uždavinio sprendimas Gomory metodu</i>	175
5.2.3.	<i>Užduotys</i>	180
5.3.	PARAMETRINIS PROGRAMAVIMAS	183
5.3.1.	<i>Geometrinė interpretacija</i>	183
5.3.2.	<i>Uždavinių, kurių tikslo funkcija priklauso nuo parametro, sprendimas</i>	192
5.3.3.	<i>Uždavinių, kurių ribojimų sistemos laisvieji nariai priklauso nuo parametro, sprendimas</i>	201
5.3.4.	<i>Uždavinių, kurių tikslo funkcija ir ribojimų sistemos laisvieji nariai priklauso nuo parametro, sprendimas</i>	207
5.3.5.	<i>Užduotys</i>	210
5.4.	TRUPMENINIO-TIESINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIAI	213
5.4.1.	<i>Geometrinė trupmeninio-tiesinio programavimo uždavinio interpretacija</i>	213
5.4.2.	<i>Trupmeninio-tiesinio programavimo uždavinio pertvarkymas į tiesinio programavimo uždavinį</i>	221
5.4.3.	<i>Užduotys</i>	224
5.5.	BLOKINIO PROGRAMAVIMO UŽDAVINIAI	227
5.5.1.	<i>Blokinio programavimo samprata</i>	227
5.5.2.	<i>Wulf-Dantzig dekompozicijos metodas</i>	235
5.5.3.	<i>Benderso dekompozicijos metodas</i>	250

5.5.3.1. Mišraus sveikaskaičio tiesinio programavimo uždavinio sprendimas	251
5.5.3.2. Tiesinio programavimo uždavinio sprendimas	255
5.5.4. Užduotys	260
5.6. LOŠIMŲ TEORIJS UŽDAVINIAI IR TIESINIS PROGRAMAVIMAS	262
5.6.1. Geometrinė lošimų teorijos uždavinių interpretacija	262
5.6.2. Lošimų teorijos uždavinio pakeitimas tiesinio programavimo uždaviniu	272
5.6.3. Užduotys	277
6. TIESINIS PROGRAMAVIMO UŽDAVINIŲ SPRENDIMAS KOMPIUTERIU	280
6.1. MICROSOFT EXCEL PROGRAMOS SPRENDĖJAS (SOLVER)	280
6.1.1. Tiesinio programavimo uždavinio sprendimas	281
6.1.2. Transporto programavimo uždavinio sprendimas	287
6.2. MATEMATINĖ KOMPIUTERINĖ SISTEMA MATHCAD	289
6.2.1. Tiesinio programavimo uždavinio sprendimas	289
6.2.2. Transporto programavimo uždavinio sprendimas	291
6.3. MATEMATINĖ PROGRAMAVIMO KALBA AMPL	291
6.3.1. Paprastas tiesinio programavimo uždavinio modelis	292
6.3.2. Bendresnis tiesinio programavimo uždavinio modelis	295
6.3.3. Uždavinio modelis naudojant aibes	297
6.3.4. Sveikaskaičio programavimo uždavinio sprendimas	299
6.3.5. Transporto programavimo uždavinio sprendimas	301
Literatūra	303

1. ĮVADAS

1.1. Matematinio programavimo raidos istorija

Jau nuo seniausių laikų žmonės ieško geriausių sprendimų ir apskritai sprendinių, optimalių vienu ar kitu požiūriu (kuo daugiau maisto, naudos, patogumų ir kuo mažiau pastangų bei išlaidų). Optimalių sprendinių paieškos, arba optimizavimo, uždaviniai buvo ir yra aktualūs. Seniau tokie uždaviniai buvo sprendžiami intuityviai, o vėliau – matematiniais metodais. Dar prieš mūsų erą graikų matematikas Euklidas aprašė, kokiais būdais galima nubrėžti ilgiausią ir trumpiausią atkarpą, jungiančią tašką su apskritimu, matematiniais metodais parodė, kokia turi būti lygiagretainio forma, kad jo plotas būtų maksimalus.

Žymūs XVII ir XVIII a. matematikai (G. Monge, Ž. Lagrange ir kt.) pasiūlė naujus optimizavimo metodus, kuriais galima spręsti įvairius fizikos ir mechanikos, geometrijos uždavinius (pavyzdžiui, minimalių sukimosi paviršių nustatymo ir pan). Prancūzų matematikas ir mechanikas Ž. Lagrange (1736–1813) pasiūlė optimizavimo uždavinių su lygybiniais apribojimais sprendimo metodus. XIX a. viduryje Vilniaus universiteto profesorius Z. Revkovskis (1807–1893) taikė matematikos metodus geležinkelio tiesimo darbų organizavimui pagerinti.

XX a. atsirado visiškai naujos klasės uždaviniai, susiję su ūkio ar įmonių valdymu, optimaliu išteklių paskirstymu bei naudojimu ir apskritai optimalių sprendimų priėmimu, atsižvelgiant į daugelį sąlygų ir veiksnių. Siekiant tiksliai suformuluoti ir išspręsti tokius uždavinius, teko sukurti naujus, labai svarbius optimizavimo metodus. Pirmasis žingsnis šiame kelyje – tiesinio programavimo teorijos ir simplekso metodo plėtra. 1937 m. Leningrado (dabar Peterburgas) universiteto profesorius L. Kantorovičius gavo užduotį: optimaliai paskirstyti darbą aštuonioms skirtingoms faneros įmonės staklėms, galinčioms gaminti penkių tipų produkciją, kai žinomas kiekvienos jų darbo našumas ir gaminamos produkcijos asortimento proporcijos. Mokslininkas suformulavo ir išsprendė šį uždavinį kaip tiesinio programavimo uždavinį. 1939 m. jis išleido knygėlę *Matematiniai gamybos organizavimo ir planavimo metodai*. Nors dėl kompiuterių